

TABLAS DE DECISIÓN

Muchos procesos de toma de decisiones pueden ser tratados por medio de *tablas de decisión*, en las que se representan los elementos característicos de estos problemas:

	Estados de la Naturaleza				
		e_1	e_2	...	e_n
Alternativas	a_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}
	a_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}

	a_m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}

EJEMPLO

- Un ama de casa acaba de echar cinco huevos en un tazón con la intención de hacer una tortilla española (omelette). Dispone, además, de un sexto huevo del que no conoce su estado, aunque es de esperar que en caso de encontrarse en buen estado y no ser utilizado, se estropeará. Al ama de casa se le presentan tres posibles alternativas:
 - Romper el huevo dentro del tazón donde se encuentran los cinco anteriores.
 - Romperlo en otro tazón diferente.
 - Tirarlo directamente.
 - Dependiendo del estado del huevo, las consecuencias o resultados que pueden presentarse para cada posible alternativa se describen en la siguiente tabla:

TABLA DEL EJEMPLO

Alternativas	Estado del 6º huevo	
	Bueno (e_1)	Malo (e_2)
Romperlo dentro del tazón (a_1)	Tortilla de 6 huevos	5 huevos desperdiciados y no hay tortilla
Romperlo en otro tazón (a_2)	Tortilla de 6 huevos y un tazón más que lavar	Tortilla de 5 huevos y un tazón más que lavar
Tirarlo (a_3)	Tortilla de 5 huevos y un huevo bueno desperdiciado	Tortilla de 5 huevos

VALORACIÓN DE LOS RESULTADOS

Aunque los resultados x_{ij} no son necesariamente números (como ocurre en el ejemplo anterior), supondremos que el decisor puede valorarlos numéricamente, es decir, se asumirá la existencia de una **función $V(\cdot)$** con valores reales tal que:

$V(x_{ij}) > V(x_{kl})$ si y sólo si el decisor prefiere el resultado x_{ij} al resultado x_{kl}

Así, en el [ejemplo de la tortilla](#) podría realizarse un proceso de valoración en el que se asignasen números a cada una de los resultados, dando lugar a una posible tabla como la que sigue:

	e_1	e_2
a_1	10	0
a_2	8	6
a_3	5	7

Por motivos de simplicidad, en lo que sigue identificaremos cada resultado con su valoración numérica. Así, x_{ij} hará referencia tanto al propio resultado como al valor asignado por el decisor.

EJEMPLO

- En cierta ciudad se va a construir un aeropuerto en una de dos posibles ubicaciones A y B, que será elegida el próximo año. Una cadena hotelera está interesada en abrir un hotel cerca del nuevo aeropuerto, para lo cual tiene que decidir qué terrenos comprar.
- La siguiente tabla muestra el precio de los terrenos, el beneficio estimado que obtendrá el hotel en cada posible localización si el aeropuerto se ubica allí, y el valor de venta de cada terreno si finalmente el aeropuerto no se construye en ese lugar (los cantidades aparecen expresadas en pesos. $\times 10^6$). ¿Cuál es la decisión más adecuada?

	Parcela en A	Parcela en B
Precio del terreno	18	12
Beneficio estimado del hotel	31	23
Valor de venta del terreno	6	4

- Las **alternativas** posibles de que dispone el decisor son las siguientes:
 - Comprar la parcela en A.
 - Comprar la parcela en B.
 - Comprar ambas parcelas.
 - No comprar ninguna parcela.
- Por otra parte, los posibles **estados de la naturaleza** son:
 - El aeropuerto se construye en A.
 - El aeropuerto se construye en B.

- Así, si la cadena hotelera compra el terreno en A y el aeropuerto se construye allí finalmente, obtendrá como rendimiento final el correspondiente a la explotación del hotel, 31, menos la inversión realizada en la compra del terreno, 18, es decir, $31-18 = 13$. Por el contrario, si el aeropuerto se construye en B, el terreno adquirido en A deberá ser vendido, por lo que se obtendrá un beneficio de 6, al que habrá que restar la inversión inicial en la compra, 18. Esto proporciona un rendimiento final de $6-18 = -12$.
- De manera análoga se determinan los resultados de las restantes alternativas ante cada uno de los posibles estados de la naturaleza, dando lugar a la siguiente tabla de decisión:

Alternativas	Estados de la Naturaleza	
	Aeropuerto en A	Aeropuerto en B
Terreno comprado		
A	13	- 12
B	- 8	11
A y B	5	- 1
Ninguno	0	0

CONCEPTO DE REGLA DE DECISIÓN

- La tabla de decisión es un mero instrumento para dar respuesta a la cuestión fundamental en todo proceso de decisión:
 - ¿Cuál es la mejor alternativa ?
- Para la elección de la alternativa más conveniente nos basaremos en el concepto de regla o criterio de decisión, que podemos definir de la siguiente forma:

Una **regla** o **criterio de decisión** es una aplicación que asocia a cada alternativa un número, que expresa las preferencias del decisor por los resultados asociados a dicha alternativa.

CLASIFICACIÓN DE LOS CONCEPTOS DE DECISIÓN

- Los procesos de decisión se clasifican de acuerdo según el grado de conocimiento que se tenga sobre el conjunto de factores o variables no controladas por el decisor y que pueden tener influencia sobre el resultado final (esto es lo que se conoce como **ambiente** o **contexto**). Así, se dirá que:
 - El ambiente es de **certidumbre** cuando se conoce con certeza su estado, es decir, cada acción conduce invariablemente a un resultado bien definido.
 - El ambiente de **riesgo** cuando cada decisión puede dar lugar a una serie de consecuencias a las que puede asignarse una distribución de probabilidad conocida.
 - El ambiente es de **incertidumbre** cuando cada decisión puede dar lugar a una serie de consecuencias a las que **no** puede asignarse una distribución de probabilidad, bien porque sea desconocida o porque no tenga sentido hablar de ella.
- Según sea el contexto, diremos que el proceso de decisión (o la toma de decisiones) se realiza bajo certidumbre, bajo riesgo o bajo incertidumbre, respectivamente.

TABLAS DE DECISIÓN BAJO CERTIDUMBRE

- En los procesos de decisión bajo certidumbre se supone que ***el verdadero estado de la naturaleza es conocido por el decisor antes de realizar su elección***, es decir, puede predecir con certeza total las consecuencias de sus acciones. Esto es equivalente a considerar **$n=1$** en la descripción de la tabla de decisión, dando lugar a siguiente tabla trivial:

	Estado de la Naturaleza
Alternativas	e_1
a_1	x_{11}
a_2	x_{21}
...	...
a_m	x_{m1}

Se selecciona como **alternativa óptima** aquella alternativa a_k tal que $x_{k1} = \max \{x_{i1} : 1 \leq i \leq m\}$

TABLAS DE DECISIÓN BAJO INCERTIDUMBRE

- En los procesos de decisión bajo *incertidumbre*, el decisor conoce cuáles son los posibles estados de la naturaleza, aunque no dispone de información alguna sobre cuál de ellos ocurrirá. No sólo es incapaz de predecir el estado real que se presentará, sino que además no puede cuantificar de ninguna forma esta incertidumbre. En particular, esto excluye el conocimiento de información de tipo probabilístico sobre las posibilidades de ocurrencia de cada estado.
- Reglas de decisión
 - Criterio de Wald
 - Criterio Maximax
 - Criterio de Hurwicz
 - Criterio de Savage
 - Criterio de Laplace

CRITERIO DE WALD

- Bajo la alternativa a_i , el peor resultado posible que puede ocurrir tiene un valor para el decisor dado por:
 - El valor s_i se denomina **nivel de seguridad** de la alternativa a_i y representa la cantidad mínima que el decisor recibirá si selecciona tal alternativa.
- En 1950, Wald sugiere que el decisor debe elegir aquella alternativa que le proporcione el mayor nivel de seguridad posible, por lo que $S(a_i) = s_i$. Así, la regla de decisión de Wald resulta ser:

Elegir la alternativa a_k tal que $s_k = \max_{1 \leq i \leq m} s_i = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} x_{ij}$

-
- Este criterio recibe también el nombre de **criterio maximin**, y corresponde a un **pensamiento pesimista**, pues razona sobre lo peor que le puede ocurrir al decisor cuando elige una alternativa.

EL EJEMPLO DEL HOTEL BAJO EL CRITERIO DE WALD

Alternativas	Estados de la Naturaleza		s_i
	Aeropuerto en A	Aeropuerto en B	
Terreno comprado			
A	13	-12	-12
B	-8	11	-8
A y B	5	-1	-1
Ninguno 🍌	0	0	0

CRITERIO MAXIMAX

- Bajo la alternativa a_i , el mejor resultado posible que puede ocurrir tiene un valor para el decisor dado por:
 - El valor o_i se denomina **nivel de optimismo** de la alternativa a_i y representa la recompensa máxima que el decisor recibirá si selecciona tal alternativa.
- El criterio maximax consiste en elegir aquella alternativa que proporcione el mayor nivel de optimismo posible, por lo que $S(a_i)=o_i$. Esta regla de decisión puede enunciarse de la siguiente forma:

Elegir la alternativa a_k tal que $o_k = \max_{1 \leq i \leq m} o_i = \max_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq n} x_{ij}$

- Este criterio corresponde a un **pensamiento optimista**, ya que el decisor supone que la naturaleza siempre estará de su parte, por lo que siempre se presentará el estado más favorable.

EJEMPLO DEL HOTEL CON CRITERIO MAXIMAX

Alternativas	Estados de la Naturaleza		
	Aeropuerto en A	Aeropuerto en B	
Terreno comprado			
A 🍌	13	-12	13
B	-8	11	11
A y B	5	-1	5
Ninguno	0	0	0

CRITERIO DE HURWICZ

- Se trata de un **criterio intermedio** entre el criterio de **Wald** y el criterio **maximax**. Dado que muy pocas personas son tan extremadamente pesimistas u optimistas como sugieren dichos criterios, Hurwicz (1951) considera que el decisor debe ordenar las alternativas de acuerdo con una **media ponderada de los niveles de seguridad y optimismo**:

$$\alpha s_i + (1 - \alpha) o_i \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

- donde α es un valor específico elegido por el decisor y aplicable a cualquier problema de decisión abordado por él, por lo que $T(\alpha_i) = \alpha s_i + (1 - \alpha) o_i$. Así, la **regla de decisión de Hurwicz** resulta ser:

- Elegir la alternativa a_k tal que $T(a_k) = \alpha s_k + (1 - \alpha) o_k = \max_{1 \leq i \leq m} \{ \alpha s_i + (1 - \alpha) o_i \}$

- Los **valores de α próximos a 0** corresponden a una **pensamiento optimista**, obteniéndose en el caso extremo $\alpha=0$ el criterio maximax.
- Los **valores de α próximos a 1** corresponden a una **pensamiento pesimista**, obteniéndose en el caso extremo $\alpha=1$ el criterio de Wald.

ELECCIÓN DE α

- Para la aplicación de la regla de Hurwicz es preciso determinar el valor de α , valor propio de cada decisor. Dado que este valor es aplicable a todos los problemas en que el decisor interviene, puede determinarse en un problema sencillo, como el que se muestra a continuación, y ser utilizado en adelante en los restantes problemas que involucren al decisor.

	Estados de la naturaleza				
Alternativas	e_1	e_2	s_i	o_i	$S(a_i)$
a_1	1	0	0	1	$1-\alpha$
a_2	λ	λ	λ	λ	λ

Si las alternativas a_1 y a_2 son indiferentes para el decisor, se tendrá $1-\alpha = \lambda$, por lo que $\alpha = 1-\lambda$. Por tanto, para determinar α el decisor debe seleccionar repetidamente una alternativa en esta tabla, modificando el valor de λ en cada elección, hasta que muestre indiferencia entre ambas alternativas.

EJEMPLO DEL HOTEL CON EL CRITERIO DE HURWICZ

Alternativas	Estados de la Naturaleza				
	Aeropuerto en A	Aeropuerto en B	s_i	o_i	$S(a_i)$
A	13	-12	-12	13	3
B	-8	11	-8	11	3.4
A y B	5	-1	-1	5	2.6
Ninguno	0	0	0	0	0

CRITERIO DE SAVAGE

- En 1951 **Savage** argumenta que al utilizar los valores x_{ij} para realizar la elección, el decisor compara el resultado de una alternativa bajo un estado de la naturaleza con todos los demás resultados, independientemente del estado de la naturaleza bajo el que ocurran. Sin embargo, el estado de la naturaleza no es controlable por el decisor, por lo que **el resultado de una alternativa sólo debería ser comparado con los resultados de las demás alternativas bajo el mismo estado de la naturaleza.**
- Con este propósito Savage define el concepto de **pérdida relativa** o **pérdida de oportunidad** r_{ij} asociada a un resultado x_{ij} como la diferencia entre el resultado de la mejor alternativa dado que e_j es el verdadero estado de la naturaleza y el resultado de la alternativa a_i bajo el estado e_j :

$$r_{ij} = \max_{1 \leq k \leq m} \{x_{kj}\} - x_{ij}$$

Así, si el verdadero estado en que se presenta la naturaleza es e_j y el decisor elige la alternativa a_i que proporciona el máximo resultado x_{ij} , entonces no ha dejado de ganar nada, pero si elige otra alternativa cualquiera a_r , entonces obtendría como ganancia x_{ij} y dejaría de ganar $x_{ij} - x_{rj}$.

- Savage propone seleccionar la alternativa que proporcione la menor de las mayores pérdidas relativas, es decir, si se define r_i como la mayor pérdida que puede obtenerse al seleccionar la alternativa a_i ,

$$\rho_i = \max_{1 \leq j \leq n} \{r_{ij}\}$$

- el criterio de Savage resulta ser el siguiente:

$$\text{Elegir la alternativa } a_k \text{ tal que } \rho_k = \min_{1 \leq i \leq m} \rho_i = \min_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq n} r_{ij}$$

- Conviene destacar que, como paso previo a la aplicación de este criterio, se debe calcular la matriz de pérdidas relativas, formada por los elementos r_{ij} . Cada columna de esta matriz se obtiene calculando la diferencia entre el valor máximo de esa columna y cada uno de los valores que aparecen en ella.

EJEMPLO DEL AEROPUERTO APPLICANDO EL CRITERIO DE SAVAGE

Alternativas	Estados de la Naturaleza		
	Aeropuerto en A	Aeropuerto en B	
Terreno comprado			
A	0	23	23
B	21	0	21
A y B 🍷	8	12	12
Ninguno	13	11	13

El mayor resultado situado en la columna 1 de la tabla de decisión original es 13; al restar a esta cantidad cada uno de los valores de esa columna se obtienen las pérdidas relativas bajo el estado de la naturaleza *Aeropuerto en A*. De la misma forma, el máximo de la columna 2 en la tabla original es 11; restando a esta cantidad cada uno de los valores de esa columna se obtienen los elementos r_{ij} correspondientes al estado de la naturaleza *Aeropuerto en B*. Como puede observarse, el valor r_i menor se obtiene para la tercera alternativa, por lo que la decisión óptima según el criterio de Savage sería comprar ambas parcelas.

CRITERIO DE LAPLACE

- Este criterio, propuesto por Laplace en 1825, está basado en el **principio de razón insuficiente**: como a priori no existe ninguna razón para suponer que un estado se puede presentar antes que los demás, podemos considerar que **todos los estados tienen la misma probabilidad de ocurrencia**, es decir, la ausencia de conocimiento sobre el estado de la naturaleza equivale a afirmar que todos los estados son equiprobables. Así, para un problema de decisión con n posibles estados de la naturaleza, asignaríamos **probabilidad $1/n$** a cada uno de ellos.
- Una vez realizada esta asignación de probabilidades, a la alternativa a_i le corresponderá un resultado esperado igual a:

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} x_{ij}$$

La regla de Laplace selecciona como alternativa óptima aquella que proporciona un mayor resultado esperado:

$$\text{Elegir la alternativa } a_k \text{ tal que } \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} x_{kj} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} x_{ij}$$

APLICACIÓN AL EJEMPLO DEL AEROPUERTO

Alternativas Terreno comprado	Estados de la Naturaleza		Resultado esperado
	Aeropuerto en A	Aeropuerto en B	
A	13	-12	0.5
B	-8	11	1.5
A y B 🚧	5	-1	2
Ninguno	0	0	0